四元数简介

Phyduck

Aug.2022

1 简介

传说中,四元数是爱尔兰数学家哈密顿在研究复数的三维形式(三元数)时,在都柏林的皇家运河上散步时突然想到的,他把

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk \tag{1.1}$$

刻在了附近的布鲁穆桥上.我们现在所用的矢量分析正是脱胎于四元数,在历史中,四元数在与矢量分析的较量中中失败了,大多数人抛弃了使用四元数这一更基本的概念而转向了看似更简单的矢量分析.事实上,如果你使用四元数,你就会发现,点乘叉乘,散度旋度等等都是非常自然的东西罢了.

我在电动力学的笔记中写了很多"由矢量分析恒等式xxx",但是并没有给出证明(常用的矢量分析恒等式见附录),因为一些恒等式的证明实在复杂,或者有一些田老师也只是给出了一些不严谨的证明.借这个机会,不妨来使用四元数去证明这些恒等式,通过这个过程,你也将感受到四元数在处理这些问题上的一致性(几乎所有公式都是由四元数的一个性质来证明的).

2 基本概念

首先来介绍一下四元数的基本概念.一个四元数a可以定义为

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = a_0 + \boldsymbol{a} \tag{2.1}$$

其中,i, j, k是三个"单位虚数",我们称a_0是实数部,$\boldsymbol{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$是虚数部.仅存在实数部的四元数就成为四元数实数,或者四元数标量,而仅存在虚数部的四元数称为四元数虚数,或者叫他四元数矢量.如哈密顿在桥上所刻的一样

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2.2}$$

我们注意到最后三项

$$k^2 = ijk = -1 \tag{2.3}$$

可以发现

$$ij = k \tag{2.4}$$

同样的,我们规定

$$jk = i, ki = j \tag{2.5}$$

以上就是四元数的全部概念了,是不是非常的简洁!!下面,我们来看四元数的乘法.

3 四元数的乘法

我们来考虑两个四元数,$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$以及$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$,使用四元数的规则(2.2),(2.4)和(2.5),可以计算他们的乘积

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j \\ &+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) k + a_0 (b_1 i + b_2 j + b_3 k) + b_0 (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \end{aligned} \tag{3.1}$$

如果我们定义

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \end{cases} \tag{3.2}$$

(事实上,这与矢量分析中的定义是相同的,矢量分析中认为ijk 为相应的单位向量,而在四元数中,则认为他们是一个平方为-1的单位虚数)则有

$$ab = a_0 b_0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + a_0 \boldsymbol{b} + b_0 \boldsymbol{a} \tag{3.3}$$

所以,如果ab都是四元数标量($a = a_0, b = b_0$),他们的四元数乘法得到

$$ab = a_0 b_0 \tag{3.4}$$

如果a是四元数标量($a = a_0$),b是四元数矢量($b = \boldsymbol{b}$),他们的四元数乘法得到

$$a\boldsymbol{b} = a_0 \boldsymbol{b} \tag{3.5}$$

如果ab都是四元数矢量($a = \boldsymbol{a}, b = \boldsymbol{b}$),他们的四元数乘法得到

$$\boldsymbol{ab} = -\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{3.6}$$

在一个四元数乘法中,我们同时得到了实数的乘法,矢量的数乘,点乘与叉乘,可见四元数才是某种意义上,最根本的东西.

与矢量分析不同,四元数的乘法满足结合律,即$abc = a(bc) = (ab)c$,这个可以由读者自己证明(其实有点复杂 懒得打那么多字了哈哈哈哈哈 但是证明比较简单 直接从定义出发就可以证明

4 一些物理学关心的式子

在我的电动力学笔记的附录中,记载了11个常用的矢量分析公式,有一些公式在证明上可谓是十分困难,而缺乏证明的记忆又是不能长久的,因此,我们不妨试着使用四元数的概念推出这些式子.

首先来规定物理中常用的Nabla算符

$$\boldsymbol{\nabla} = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.1}$$

我们让Nabla算符作用(其实是四元数乘法)在一个四元数标量上,就有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} f &= (i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z})f \\ &= i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned} \tag{4.2}$$

让Nabla算符作用在一个四元数矢量上,有

$$\boldsymbol{\nabla A} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{4.3}$$

由于四元数乘法的特性,我们同时得到了散度和旋度!考虑Nabla算符自身的四元数乘法,而Nabla算符是一个四元数矢量(虚数),所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla\nabla} &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla} \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y})i + (\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z})j + (\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x})k\end{aligned} \tag{4.4}$$

在电动力学中,我们也说过,在物理里,我们考虑的场,一般都是Regular的,也就是只有有限个第一类间断点,且其他区域连续可导的,于是求导先后次序可以交换.上式虚数部应为0,即

$$\boldsymbol{\nabla\nabla} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\boldsymbol{\nabla}^2 \tag{4.5}$$

$\boldsymbol{\nabla}^2$称为Laplace算符.

有了以上知识,我们就可以来尝试解决电动力学中那些看着头大的矢量恒等式了. 首先考虑第一个,我

们看到了三个矢量a,b,c,自然就想到刚刚提到的,四元数的乘法是具有结合率的,我们来考虑$\boldsymbol{abc}$

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab})\mathbf{c} &= -(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \\ &= -(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) &= -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\ &= -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\end{aligned} \tag{4.8}$$

注意到两式中第二项为标量,第一项和第三项为矢量,又考虑到(4.6),我们有矢量部和标量部分别相等,即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{4.9}$$

如果我们在式(4.6)中将ab调换,即使用两种方法求$\boldsymbol{bac}$,我们可以得到

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) \tag{4.10}$$

考虑到交换叉乘左右会出现一个负号(可以由3.2式2看出),我们有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) \tag{4.11}$$

综合(4.9)与(4.11),可以得到

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} \tag{4.12}$$

这就是附录中的第一式.除此之外,我们利用矢量部相等,得到

$$-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{4.13}$$

注意到这个式子和(A.2)比较像,但在(A.2)中只有$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$,而不存在$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,为了获得这一项,我们应该放照(4.9)得到(4.10)的方法,交换次序来做. 首先交换$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$次序,我们有

$$-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) \tag{4.14}$$

, 不难发现,上式左边第二项$-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,我们让(4.13)+(4.14),有

$$-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{4.15}$$

,与(A.2)比较,多了$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$这一项,于是我们再次做交换,交换$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$次序,我们有

$$-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) \tag{4.16}$$

两边取负号

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{4.17}$$

用(4.15)+(4.17),有

$$-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{4.18}$$

或

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{4.19}$$

这就是(A.2),回顾一下刚刚的做法,我们从$\boldsymbol{abc}$出发,利用四元数乘法的结合律,比较矢量部和标量部,推出了(A.1)和(A.2).事实上,我们会发现,几乎所有矢量分析恒等式都是由这个性质推出来的.与利用复杂的矢量分析,利用指标等技巧不同,这一切都是非常自然的,甚至你完全不需要思考,只需要记住四元数矢量的乘积会导出一个点乘和叉乘,点乘是负的,叉乘是正的,剩下的就是一些简单的数学推演了(加减法,合并同类项,等等).这有利于我们在学习物理时可以将精力更多的放在物理图景上,而不是复杂的数学记号.

(A.3)的推导相信大家一眼就能看出来了!利用$(ab)(cd)=a(bc)d$即可!这里就不证明了,我们来看带Nabla的恒等式.

看到(A.4)的形式,我们来考虑$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\psi$,其中,$\psi$是一个四元数标量. 考虑到

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla})\psi=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\psi) \tag{4.20}$$

从(4.5)可以知道,上式左边会得到$-\boldsymbol{\nabla}^2\psi$,我们来考虑右边

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\psi)=-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\psi)+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi) \tag{4.21}$$

而$-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\psi)=-\boldsymbol{\nabla}^2\psi$,综合以上,有

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}^2\psi&=-\boldsymbol{\nabla}^2\psi+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi)\\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi)&=0\end{aligned} \tag{4.22}$$

至此,我们推出了(A.4).当然这个式子我们也可以不必借助四元数,从物理意义出发即可.$\boldsymbol{\nabla}\psi=\boldsymbol{A}$表示一个矢量场,而这个矢量场有梯度即表示其是有势的,也就是要满足矢量场绕任意闭合路径一周的路径积分为0.

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{4.23}$$

利用Stokes公式,

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iiint_S \nabla\times\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.24}$$

所以

$$\nabla\times\nabla\psi = \nabla\times\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.25}$$

下面观察(A.5)和(A.6)的左边,现在大家应该已经很熟练了吧!我们来考虑$\nabla\nabla\boldsymbol{a} = (\nabla\nabla)\boldsymbol{a} = \nabla(\nabla\boldsymbol{a})$,左边仍然会给出laplace算符的负数,来看右边吧!

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla\boldsymbol{a}) &= \nabla(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \nabla(\nabla\cdot a)\\ &= \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \nabla(\nabla\cdot a)\end{aligned} \tag{4.26}$$

整理有

$$-\nabla^2\boldsymbol{a} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \nabla(\nabla\cdot a) \tag{4.27}$$

注意到左边是一个矢量,而右边的1,3项为矢量,第二项为标量,我们考虑矢量标量分别相等,有

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) = 0\\ \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}\end{cases} \tag{4.28}$$

这就是(A.5)与(A.6).同样的,4.28的第一式也是有物理意义的,一个矢量场具有两种"度",一为散度,二为旋度,我们可以用这两者完全的说明一个场的矢量性质.形象一点来考虑,在某点的小邻域内画一个圆,散度表示的是有没有"源"或"汇",考虑的是这个圆法线上的性质,而旋度考虑的是有没有"旋",是切向的性质,这两者是正交的,旋度的散度自然为0.(当然这个解释并不是很严谨,稍微严谨一点的物理解释与解释梯度场无旋类似.)

继续往下证明,在证明(A.7)和(A.8)时,我们需要用到nabla算符的微分性质

$$\nabla(\psi\boldsymbol{a}) = (\nabla\psi)\boldsymbol{a} + \psi\nabla\boldsymbol{a} \tag{4.29}$$

看到这里,相信细心的朋友们就发现了,你不是说四元数乘法有结合律吗?为什么会多出来右边的第二项?(其实是我的疑问),不过我自己是这么想的,将nabla算符看作一个四元数矢量,是具有四元数乘法的一些性质的(比如与矢量相乘获得点乘和叉乘),但是nabla算符本身比较特殊,他不仅仅是一个四元数矢量,他还有微分性质,对两个量的四元数积做微分自然与对一个量做微分再与另一个量做四元数积不同.

下面分别来求上式的左边和右边

$$\nabla(\psi\boldsymbol{a}) = \nabla\times(\psi\boldsymbol{a}) - \nabla\cdot(\psi\boldsymbol{a}) \tag{4.30}$$

$$(\nabla\psi)\boldsymbol{a} + \psi\nabla\boldsymbol{a} = (\nabla\psi)\times\boldsymbol{a} - (\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{a} + \psi\nabla\times\boldsymbol{a} - \psi\nabla\cdot\boldsymbol{a} \tag{4.31}$$

做与之前同样的把戏,我们分离矢量和标量部(红色为矢量部,蓝色为标量部)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\psi\boldsymbol{a})&=(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\boldsymbol{a}+\psi\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}\\ \nabla\cdot(\psi\boldsymbol{a})&=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}\tag{4.32}$$

这就是(A.7)和(A.8),我们就剩最后三个式子需要解决了!我们应当考虑$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$,注意$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$都是矢量. 由于微分性质,我们有

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}\tag{4.33}$$

这个式子的推导暂略,后续补充.同样的,把左边和右边分别根据四元数的乘法来计算.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=\color{red}{\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}\color{blue}{-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}\color{red}{-\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}\end{aligned}\tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}\\&=\color{red}{(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}}\color{blue}{-(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}\color{red}{-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})}+\color{blue}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})}\\&+\color{red}{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}}\end{aligned}\tag{4.35}$$

首先考虑标量部相等(蓝色区域)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})\tag{4.36}$$

这是(A.10) 然后考虑矢量部相等

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}\tag{4.37}$$

这个恒等式略长,观察发现左边存在叉乘和数量积,我们应当考虑如何把他们分开.不妨尝试做与之前求(A.1)-(A.3)一样的事情,我们交换**a**和**b**(下面的公式中为了与37式形式上保持一致,有一些已经做了符号处理与顺序交换)

$$-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}\tag{4.38}$$

两者相加,有

$$-2\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}\tag{4.39}$$

即

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) \tag{4.40}$$

这就是(A.9),两式相减,有

$$2\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-2(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} \tag{4.41}$$

即,

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} \tag{4.42}$$

这和(A.11)是一致的.

至此,我们已经推出了矢量分析常用恒等式的全部内容.是不是非常的简单!自己来试试吧!

A 矢量分析常用公式

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{A.2}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \tag{A.3}$$

$$\nabla \times \nabla\psi = 0 \tag{A.4}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0 \tag{A.5}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a} \tag{A.6}$$

$$\nabla \cdot (\psi \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla\psi + \psi \nabla \cdot \boldsymbol{a} \tag{A.7}$$

$$\nabla \times (\psi \boldsymbol{a}) = \nabla\psi \times \boldsymbol{a} + \psi \nabla \times \boldsymbol{a} \tag{A.8}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) \tag{A.9}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \tag{A.10}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} \tag{A.11}$$